Uitwerkingen hoofdstuk 15 deel VWO A 1,2 deel 4

Differentiëren

1. De grafieken van y_1 en y_2 zijn steeds hetzelfde. De formules zijn alleen anders geschreven.

2.

a. $x^5.\sqrt{x} = x^5.x^{\frac{1}{2}} = x^{5,5}$

b. $\dfrac{\sqrt{x}}{x^3} = \dfrac{x^{0,5}}{x^3} = x^{-2,5}$

c. $\dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^1.x^{0,5}} = \dfrac{1}{x^{1,5}} = x^{-1,5}$

d. $x^3.x^{2,5} = x^{3+2,5} = x^{5,5}$

e. $\dfrac{x}{\sqrt[5]{x}} = \dfrac{x}{x^{0,2}} = x^{0,8}$

f. $\dfrac{x^4.x^{1,8}}{x^{-0,5}} = \dfrac{x^{5,8}}{x^{-0,5}} = x^{5,8-(-0,5)} = x^{6,3}$

3. a. $x^5 = 81 \iff x = \sqrt[5]{81} \approx 2,41$

b. $x^{2,3} = 17 \iff x = \sqrt[2,3]{17} \approx 3,43$

c. $x^{-2,8} = 3 \iff x = \sqrt[-2,8]{3} \approx 0,68$

4. a. $3x^5 = 57 \iff \mathrm{x}^5 = \frac{57}{3} \iff x = \sqrt[5]{\frac{57}{3}} \approx 1,80$

b. $1,8x^{2,3} = 21 \iff x^{2,3} = \frac{21}{1,8} \iff x = \sqrt[2,3]{\frac{21}{1,8}} \approx 2,91$

c. $0,09x^{-1,2} = 8 \iff x^{-1,2} = \frac{8}{0,09} \iff x = \sqrt[-1,2]{\frac{8}{0,09}} \approx 0,02$

5. a. $x^3 + 8 = 100 \iff x^3 = 92 \iff x = \sqrt[3]{92} \approx 4,51$

b. $5x^7 - 1 = 98 \iff 5x^7 = 99 \iff x^7 = \frac{99}{5} \iff x = \sqrt[7]{\frac{99}{5}} \approx 1,53$

c. $2,6 + 1,3x^{1,2} = 8 \iff 1,3x^{1,2} = 5,4 \iff x^{1,2} = \frac{5,4}{1,3} \iff x = \sqrt[1,2]{\frac{5,4}{1,3}} \approx 3,28$

6. a. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{5}{x^3} + 5x^3\right) = \dfrac{d}{dx}\left(5.x^{-3} + 5x^3\right) = -15x^{-4} + 15x^2$

b. $\dfrac{d}{dx}\left(3x^5 - \dfrac{4}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(3.x^5 - 4x^{-1}\right) = 15x^4 + 4x^{-2}$

7 a. $\dfrac{d}{dq}\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{d}{dq}\left(q^{-1}\right) = -q^{-2}$

b. $\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2p^2}\right) = \dfrac{d}{dp}\left(p^{-1} - \frac{1}{2}p^{-2}\right) = -p^{-2} + p^{-3}$

8 a. $y = x + \sqrt{x} = x + x^{0,5} \Rightarrow y' = 1 + 0,5x^{-0,5}$

b. $y = 3x\sqrt{x} = 3x^{1,5} \Rightarrow y' = 4,5x^{0,5}$

c. $y = 3x - x^{-1,5} \Rightarrow y' = 3 + 1,5x^{-2,5}$

d. $y = \sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y' = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}$

e. $y=\frac{2}{x}-3x^{0,6}=2x^{-1}-3x^{0,6} \;\Rightarrow\; y'=-2x^{-2}-1,8x^{-0,4}$

f. $y=(1+x)\sqrt{x}=\sqrt{x}+x\sqrt{x}=x^{0,5}+x^{1,5} \;\Rightarrow\; y'=0,5x^{-0,5}+1,5x^{0,5}$

9. $y=x+\frac{1}{x}$

a. $y=x+x^{-1} \;\Rightarrow\; y'=1-x^{-2}=1-\frac{1}{x^2} \;\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x^2=1 \;\Leftrightarrow\; x=1 \vee x=-1$

Uit de schets van het boek blijkt dat er voor x = -1 een maximum is met waarde f(-1) = -2 en voor x = 1 is er een minimum met waarde f(1) = 2

b. Punt A (4, $4\frac{1}{4}$) Stel de vergelijking van k is : y = ax + b dan : $f'(4)=1-\,-\frac{1}{16}=\frac{15}{16} \Rightarrow$
$k: y=\frac{15}{16}x+b$ en k door A $\Rightarrow \frac{17}{4}=\frac{15}{16}.4+b \;\Leftrightarrow\; b=\frac{17}{4}-\frac{15}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow k: y=\frac{15}{16}x+\frac{1}{2}$

c. Snelheid = $y'(0,5)=1-\frac{1}{0,25}=1-4=-3$

10. $y=8-\frac{16}{x}+\frac{24}{x^2}$

a. Top A: $\Rightarrow\; y=8-\frac{16}{x}+\frac{24}{x^2}=8-16x^{-1}+24x^{-2} \;\Rightarrow\; y'=16x^{-2}-48x^{-3}$ $\;y'=0 \Leftrightarrow$
$\frac{16}{x^2}=\frac{48}{x^3} \;\Rightarrow\; 16x^3=48x^2 \Leftrightarrow 16x^3-48x^2=0 \;\Leftrightarrow\; 16x^2(x-3)=0 \;\Leftrightarrow\; x=3 \wedge x\neq 0 \Rightarrow$
punt A wordt dan :A(3 , 8- $\frac{16}{3}+\frac{24}{9}$) = A(3, $5\frac{1}{3}$)

b. $y'(-2)=\frac{16}{4}-\frac{48}{-8}=4+6=10$

c. $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(16x^{-2}-48x^{-3}\right)=-32x^{-3}+144x^{-4} \;\Rightarrow$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{32}{x^3}=\frac{144}{x^4} \;\Rightarrow\; 32x^4=144x^3 \;\Leftrightarrow\; 16x^3(2x-9)=0$ en $x\neq 0 \Rightarrow x=4,5$

d. Maximale snelheid $\Rightarrow y''=0 \;\Leftrightarrow\; x=4,5$ (vraag c) $\Rightarrow$punt B wordt dus: B(4,5 ; 5,63)

e. Top ligt op de x-as als punt A dus op de x-as komt te liggen. Voor a = 8 geldt A (3 , $5\frac{1}{3}$) We moeten dus punt $5\frac{1}{3}$ naar beneden schuiven en dus ook de rest van de grafiek $\Rightarrow a=2\frac{2}{3}$

11. $y=12x^{0,3}-3x$ met $x\geq 0$

a. A(4,y(4)) $\Rightarrow y_A=12.4^{0,3}-12\approx 6,19$ en $y'=3,6x^{-0,7}-3 \;\Rightarrow y'(4)=3,6.4^{-0,7}-3\approx -1,64$

b. Snelheid is $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0,3}=3,6.0,3^{-0,7}-3\approx 5,36$

c $\left(\frac{dy}{dx}\right)=0 \Leftrightarrow 3,6.x^{-0,7}-3=0 \Leftrightarrow 3,6x^{-0,7}=3 \Leftrightarrow x^{-0,7}=\frac{5}{6} \Leftrightarrow x=\sqrt[-0,7]{\frac{5}{6}}\approx 1,30$

Uit de schets van het boek weten we dat er een maximum is bij $x\approx 1,30$

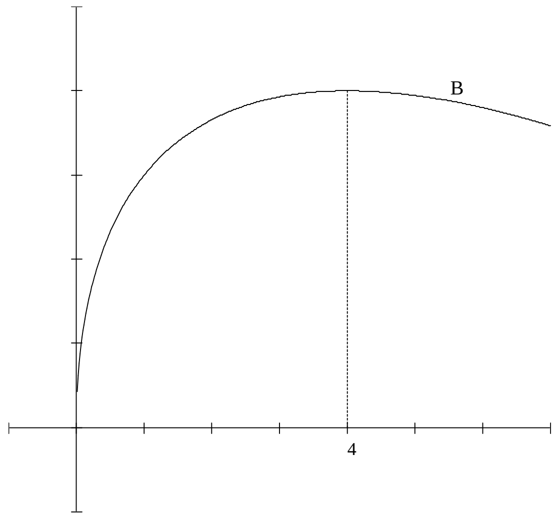
12. $R=4q^{0,4}-q$ met q in duizendtallen.

a. Snelheid $\Rightarrow R'=1,6q^{-0,6}-1 \;\Rightarrow R'(0,5)=1,6\,.\,(0,5)^{-0,6}-1\approx 1,43 \;\Rightarrow$ bij een productie van 500 stuks neemt de opbrengst met 1,43 euro per stuk toe.

b. 4500 stuks ⇒ $q = 4{,}5$ ⇒ $R'(4{,}5) = 1{,}6 \cdot (4{,}5)^{-0{,}6} - 1 \approx -0{,}35$ ⇒ bij een productie van 4500 neemt de opbrengst met 0,35 euro per stuk af.

c. maximum ⇒ $R' = 0 \Leftrightarrow 1{,}6q^{-0{,}6} = 1 \Leftrightarrow 1{,}6q^{-0{,}6} = 1 \Leftrightarrow q^{-0{,}6} = 0{,}625 \Leftrightarrow q = \sqrt[-0{,}6]{0{,}625} \approx 2{,}19$
Uit de schets zien we dat er bij $q \approx 2{,}19$ een maximum is van $R(2{,}19) \approx 3{,}28$
⇒ de maximale opbrengst is dan dus 3280 euro

13 $B = 4\sqrt{t} - t$ met B in dm^2 en t in maanden en $0 \le t \le 6$



a. $B = 4t^{0{,}5} - t \Rightarrow B' = 2t^{-0{,}5} - 1$ ⇒ snelheid is:
$B'(3) = 2 \cdot 3^{-0{,}5} - 1 \approx 0{,}15$ dm^2/maand = 15 cm^2/maand

b. maximum ⇒ $B' = 0 \Rightarrow 2t^{-0{,}5} = 1 \Leftrightarrow t^{-0{,}5} = 0{,}5 \Leftrightarrow$
$t = \sqrt[-0{,}5]{0{,}5} = 4$ en uit de schets volgt dat er een maximum is bij $t = 4$ met waarde $B(4) = 4$ dm^2

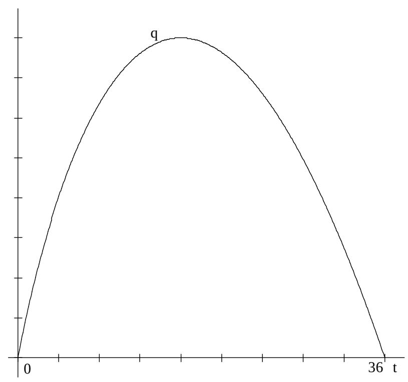
14. $q = 6t - t^{1{,}5}$ met q ia het aantal verkochte T-shirts per dag in duizendtallen en t is het aantal dagen na 12 mei.

a. 20 mei ⇒ $t = 8$ ⇒ $q(8) \approx 25{,}37$ ⇒ er zijn dan ongeveer 25370 T-shirts verkocht.

b. Snelheid = $q'(t) = 6 - 1{,}5t^{0{,}5}$ ⇒ $q'(20) = 6 - 1{,}5 \cdot 20^{0{,}5} \approx -0{,}71$ ⇒ er is een afname per dag van 710 T-shirts.

c. $q(16) = 32$ en $q(4) = 16$ ⇒ het meerpercentage is dan : $\frac{3200 - 1600}{1600} \cdot 100\% = 100\%$

d. $q(0) = 0$ en $q(36) = 0$ Nu de grafiek schetsen



⇒ door de positieve q dat er alleen verkoop is geweest voor waarden van t tussen 0 en 36.

e. $q'(t) = 6 - 1{,}5t^{0{,}5} = 0 \Leftrightarrow 1{,}5t^{0{,}5} = 6 \Leftrightarrow t^{0{,}5} = 4 \Leftrightarrow$
$t = 16$ Uit de schets volgt dat er een maximum is .
Het maximum is bij $t = 16$ dus op 28 mei
$q(16) = 32$ ⇒ er werden toen 32000 T-shirts verkocht.

15. $K = 0{,}00001q^3 - 0{,}007q^2 + 2{,}1q + 100$ met K in euro's en q is het aantal.

a. $K' = 0{,}00003q^2 - 0{,}014q + 2{,}1$ ⇒ $K'(100) = 1$ ⇒ de kosten nemen met 1 euro/stropdas toe.

b. Grotere productie ⇒ efficiënter werken ⇒ bij verdere stijging van de productie dan stijgen ook de kosten.(bijv. door meer werkmensen)
Nu K in voeren in GR ⇒ $K = y_1$ Nu bijv. met trace bepalen waar dat omslagpunt ongeveer ligt ⇒ $q \approx 250$. De snelheid is hier minimaal.

c. $K(81) \approx 229{,}49$ en $K(80) \approx 228{,}32$ $\Rightarrow$ de marginale kosten MK bij $q = 80$ zijn dan :
MK = 229,49 – 228,32 = 1,17 euro

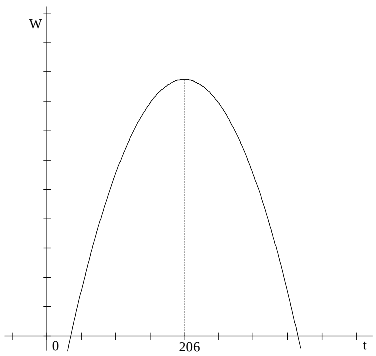
d. $K(101) - K(100) = MK(100) \approx 251{,}00 - 250 \approx 1$ euro
Er geldt hier dat $MK(100) = K'(100)$

16. $K = 0{,}00012q^3 - 0{,}04q^2 + 10q + 1000$ met K in euro's en q is de productie.

a. Voer in $y_1 = K$ Nu geldt $MK = K'(250) = 12{,}50$ euro m.b.v dy/dx uit calc-menu.

b. $p = -0{,}1q + 50 \Rightarrow R = p.q = q(-0{,}1q + 50)$ en $W = R - K =$
$q(-0{,}1q + 50) - (0{,}00012q^3 - 0{,}04q^2 + 10q + 1000)$

c. Voer in $y_2 = x(-0{,}1x + 50)$ en $y_3 = y_2 - y_1$ de optie maximum geeft bij $x \approx 206$ is er een maximum van 3645
$\Rightarrow W$ is maximaal met een waarde van 3645 bij een productie van 206. Dat is ook te zien in de gegeven schets.
Er is een maximum als $W' = 0 \Rightarrow MW = 0$



d. $R'(206) = MR(206) = 8{,}8$ m.b.v de optie dy/dx uit het calcmenu.
Ook geldt $K'(206) = MK(206) = 8{,}8$ via y_1 en weer de optie dy/dx uit het calc-menu .
Verklaring : $W = R - K \Rightarrow \frac{dW}{dq} = \frac{dR}{dq} - \frac{dK}{dq}$
Aangezien er een maximum is bij $q = 206$ geldt daar dus $\frac{dW}{dq} = 0 \Rightarrow \frac{dR}{dq} = \frac{dK}{dq} \Rightarrow MR = MK$

17.

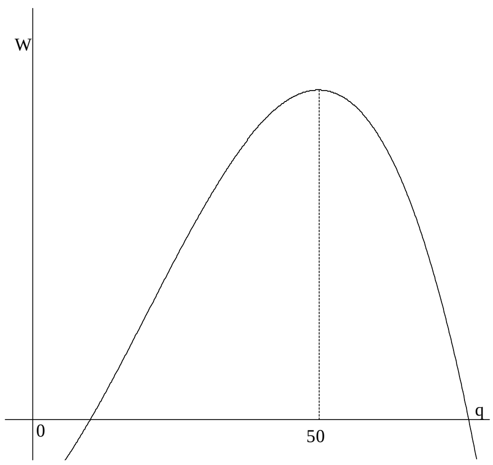
a. Stel $p = aq + b$ $a = \frac{6-0}{0-120} = -0{,}05$ $\Rightarrow p = -0{,}05q + b$ door $(0,6) \Rightarrow b = 6 \Rightarrow$
$p = -0{,}05q + 6$ $R = p.q = (-0{,}05q + 6).q = -0{,}05q^2 + 6q$

b. Lijn door (60,0) en (0,6) $\Rightarrow$ r.c. = $\frac{6-0}{0-60} = -0{,}1$ en door (0,6) $\Rightarrow MR = -0{,}1q + 6$
Dit is inderdaad de afgeleide van R.

c. $R' = 0 \Leftrightarrow -0{,}1q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = 60$ R is een bergparabool $\Rightarrow$ er is dus een maximum. $\Rightarrow$
Maximum voor $q = 60$. Dit klopt ook in figuur 15.3 want dan is $MR = 0$

d. $K = 0{,}001q^3 - 0{,}11q^2 + 4{,}5q + 20$ Voer in in GR: $y_1 = R(x)$ en $y_2 = K(x)$ $\Rightarrow y_3 = y_1 - y_2$
Met de optie maximum uit het calcmenu vinden we het maximum bij y_3 bij $x = 50$ en $y = 80$
Zie ook de schets van de winstfunctie. $\Rightarrow$ De winst is maximaal bij $q = 50$

e. $MR = MK \Rightarrow MR - MK = W' = 0$ Bij $W' = 0$ geldt $q = 50$ (zie d) Daar is de winst maximaal.



18.

a. $q = 20 \Rightarrow K = 30 \Rightarrow GK = 30/20 = 1{,}5$ euro per eenheid.

b. De gemiddelde kosten nemen eerst af en vervolgens toe. Dat is te zien aan de r.c. van de verbindingslijn vanuit O naar de punten van de grafiek van *K*.

c. M.b.v. de geodriehoek de raaklijn aan K door punt O $\Rightarrow q \approx 32$

19.

a. $q = 20$ dan $W = 200 \Rightarrow GW = 200/20 = 10$ euro per stuk
$q = 50$ dan $W = 350 \Rightarrow GW = 350/50 = 7$ euro per stuk

b. De gemiddelde winst (*GW*) kan weergegeven worden door de r.c. van de verbindingslijn door O en een punt van de winstgrafiek. *GW* is maximaal als deze lijn de grafiek van W vanuit O raakt. Aflezen geeft $q \approx 28$ dan $W \approx 320 \Rightarrow$ maximale GW is dan $320/28 \approx 11{,}4$ euro per stuk en natuurlijk bij $q \approx 28$.

20.

a. $q = 2000$ dan $K = 1000 \Rightarrow GK = 1000/2000 = 0{,}50$ euro per pot.

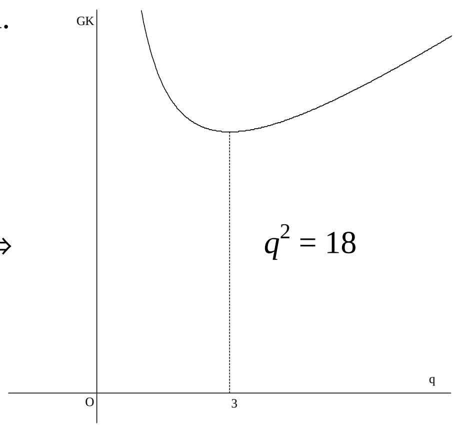
b. $q = 4000$ dan $K = 1200 \Rightarrow GK = 1200/4000 = 0{,}30$ euro per pot
GK bij $q = 4000$ is de r.c van de lijn door O en (4000,1200) Nu moeten we dezelfde gemiddelde kosten krijgen dus dezelfde lijn $\Rightarrow$ deze lijn verlengen $\Rightarrow$ snijpunt (6700,2000)
$\Rightarrow$ *GK* is gelijk bij een productie van 6700 potten.

c. Nu moet *GK* minimaal zijn . We moeten dan de raaklijn hebben vanuit O aan *K* . Aflezen geeft dan $q \approx 5400$ dan $K \approx 1450 \Rightarrow GK_{min} = 1450/5400 \approx 0{,}27$ euro per pot.
Natuurlijk geldt ook $MK = 0{,}27$, want het is de raaklijn

d. Nu moeten we het punt zoeken met de kleinste helling. Dit is ongeveer bij $q \approx 3000$

21. Bij de gemiddelde kostenfunctie hebben we een minimum omdat de raaklijn vanuit O een minimale r.c. heeft.
Bij de gemiddelde winst is de situatie omgekeerd omdat de r.c. van de raaklijn vanuit O juist een maximum heeft.

22. $K = 2q^2 + 5q + 18$ met *K* in duizenden euro's en *q* in duizenden.



a. $GK = \dfrac{K}{q} = \dfrac{2q^2+5q+18}{q} = 2q+5+\dfrac{18}{q}$ $MK = K' = 4q + 5$

b. $GK = 2q+5+18q^{-1} \Rightarrow GK' = 1-18q^{-2} = 1-\dfrac{18}{q^2} \Rightarrow GK' = 0 \Leftrightarrow q^2 = 18$
$\Rightarrow q = 3$ ($q > 0$)
en uit de schets volgt dat *GK* minimaal is voor $q = 3$.

c. $GK(3) = 2.3 + 5 + 18/3 = 17$
$MK(3) = 4.3 + 5 = 12 \Rightarrow MK = GK$ voor $q = 3$
In de figuur uit het boek is te zien dat de raaklijn in $q = 3$ door de oorsprong gaat.

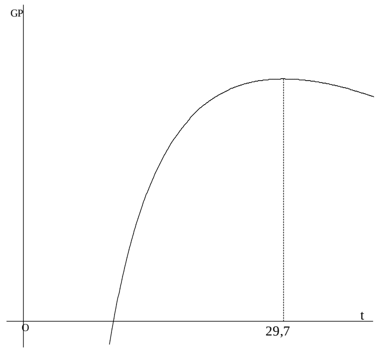
d. Je vindt *GK* door een lijn te trekken vanuit een punt naar punt O. *GK* is minimaal in de raaksituatie.
MK krijg je juist net door een raaklijn te tekenen en als deze door de oorsprong gaat dan is *MK* dus minimaal.

23. $P = -2{,}5t^2 + 240t - 2200$ met P in m^3 per ha en t de tijd in jaren met $15 \le t \le 40$

a. $t = 20 \Rightarrow \quad P(20) = 1600$ dus $GP = 1600/20 = 80$ m^3 per ha.

b. Nu een lijn trekken door O die de grafiek raakt. $\Rightarrow t \approx 30 \Rightarrow$ na 30 jaar is de gemiddelde houtproductie maximaal per jaar.

c.



$$GP = \frac{P}{t} = \frac{-2{,}5t^2 + 240t - 2200}{t} = -2{,}5t + 240 - \frac{2200}{t} = -2{,}5t + 240 - 2200t^{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{d(GP)}{dt} = 0 \Rightarrow -2{,}5 + 2200t^{-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2200}{t^2} = 2{,}5 \Rightarrow t^2 = \frac{2200}{2{,}5} = 880 \quad \Rightarrow t \approx 29{,}7$$

en uit de schets hierboven volgt dat er een maximum is bij $t \approx 29{,}7$. Het maximum is dan ongeveer 91,7 m^3 per ha.

24. $W = -23t^2 + 976t - 828$ met t in jaren en W in duizenden euro's en $0 \le t \le 20$.

a. $$GW = \frac{W}{t} = \frac{-23t^2 + 976t - 828}{t} = -23t + 976 - \frac{828}{t} = -23t + 976 - 828t^{-1} \Rightarrow$$

$$GW' = -23 + 828t^{-2} \Rightarrow GW' = 0 \Leftrightarrow \frac{828}{t^2} = 23 \Leftrightarrow t^2 = \frac{828}{23} = 36 \quad \Rightarrow t = 6$$ Uit de tekening uit het boek blijkt dat de gemiddlede kosten maximaal zijn door de raaklijn uit O te tekenen . Dit geeft de maximale gemiddelde winst bij $t \approx 6$. Het maximum is dan :
$GW_{max} = -23.6 + 976 - 828/6 = 700$ duizend euro.

b. Na 6 jaar , want dan is de gemiddelde winst maximaal.

25.

a. Bestelkosten zijn: 4 . 35 = 140 euro per jaar.

b. Gemiddeld in voorraad is de helft van datgene dat besteld is $\Rightarrow$ 0,5 .180 = 90 accu's.
Voorraadkosten zijn : 90 . 3 = 270 euro per jaar.

c. Totale kosten per jaar zijn : 140 + 270 = 410 euro

d. Bestelkosten zijn dan : 12 . 35 = 420 euro en men bestelt per keer 1/12 keer 720 is 60 accu's.
De voorraadkosten zijn dus 0,5 . 60 . 3 = 90 euro
De totale kosten zijn dan : 420 + 90 = 510 euro per jaar.

e. Drie keer per maand een bestelling ⇒ 36 bestellingen ⇒ bestelkosten : 36 . 35 = 1260 euro
Per bestelling nodig 1/36 . 720 = 20 ⇒ voorraadkosten zijn 10.3 = 30 euro
Totale kosten dan : 1260 + 30 = 1290 euro
Eén bestelling ⇒ kosten 35 euro
Voorraadkosten zijn dan 0,5 . 720 . 3 = 1080
De totale kosten zijn dan : 35 + 1080 = 1115 euro

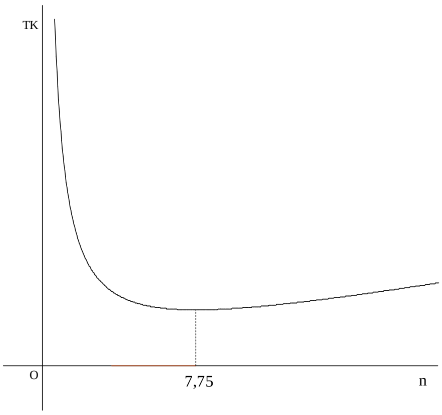
26. 1200 pakken ; voorraadkosten 4 euro per doos per jaar en 40 euro per bestelling.
$TK = \frac{2400}{n} + 40n$

a. VK = 0,5 . 1200/n . 4 euro = 2400/n
BK = 40 . n n bestellingen van 40 euro
$TK = VK + BK = \frac{2400}{n} + 40n = 2400.n^{-1} + 40n$

b. $TK' = -2400.n^{-2} + 40 \Rightarrow TK' = 0 \Leftrightarrow$
$40 = \frac{2400}{n^2} \Rightarrow n^2 = \frac{2400}{40} = 60 \Rightarrow n = \sqrt{60} \approx 7{,}75$

Uit de schets volgt dat we een minimum hebben bij
n = 7,75 ⇒
TK is minimaal bij n = 8

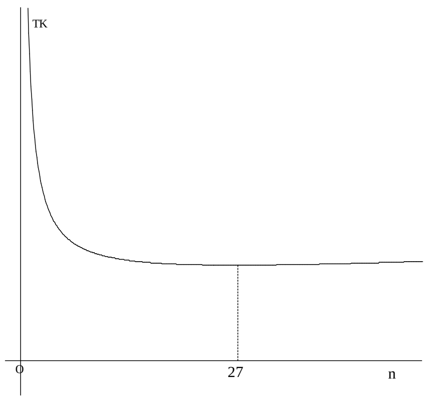
c. De minimale kosten zijn dan 2400/8 + 320 = 620 euro



27. 360 koelkasten per jaar. Voorraadkosten 20 euro per kast per jaar. Per bestelling 5 euro + 3 euro per koelkast erbij. $TK = \frac{3600}{n} + 5n + 1080 = 3600.n^{-1} + 5n + 1080$

a. $BK = 5.n + 3.360 = 5n + 1080$ n bestellingen en in totaal moeten er 360 koelkasten geleverd worden.
$VK = 0{,}5.\frac{360}{n}.20 = \frac{180}{n}.20 = \frac{3600}{n}$ Dus $TK = VK + BK = \frac{3600}{n} + 5n + 1080$

b. $TK' = 0 \Rightarrow -3600.n^{-2} + 5 = 0 \Leftrightarrow$
$5 = \frac{3600}{n^2} \Rightarrow n^2 = \frac{3600}{5} = 720 \Rightarrow n = \sqrt{720} \approx 26{,}8$
Uit de schets volgt dat er dus een minimum is bij n = 27
De omvang per bestelling is dan : 360/27 en dat zijn dus 13 of 14 koelkasten per bestelling.



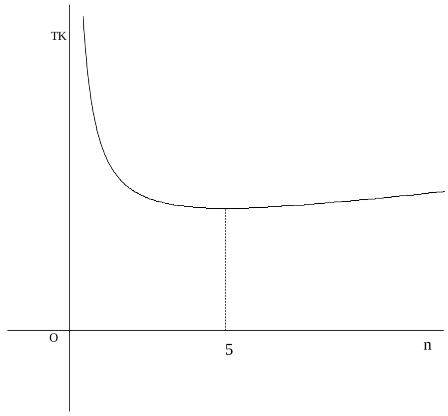
Andere oplossing: Voer in in GR: $y_1 = TK(x)$ Met de optie minimum vinden we ook de gevraagde oplossing zoals hieboven is aangegeven.

28. 5000 stofzuigers. 1000 euro per keer. Prod. kosten per stofzuiger 40 euro ; voorraadkosten 10 euro per stofzuiger per jaar.

a. $VK = 0{,}5.\dfrac{5000}{n}.10 = \dfrac{25000}{n}$

PK = 1000.n + 5000.40 = 1000n + 20000

$TK = \dfrac{25000}{n} + 1000n + 20000 = 25000.n^{-1} + 1000n + 20000$



b. $TK' = 0 \Leftrightarrow -25000n^{-2} + 1000 = 0 \Leftrightarrow$

$1000 = \dfrac{25000}{n^2} \Rightarrow n^2 = \dfrac{25000}{1000} = 25 \Rightarrow n = 5$

Uit de schets blijkt dat er een minimum is bij $n = 5$

$\Rightarrow TK_{min} = 25000/5 + 1000.5 + 20000 = 30000$ euro

Opmerking: Met GR mag het hier natuurlijk ook.

29. 360 accu's ; 40 euro per bestelling ; VK 20% van inkoopprijs.; n bestellingen

a. Als $n > 18 \Rightarrow$ 19 of meer bestellingen $\Rightarrow$ per bestelling dan nodig: 360/19 = 18, 9 of minder . $\Rightarrow$ het aantal is dan dus minder dan 19 $\Rightarrow$ inkoopprijs 25 euro $\Rightarrow$

$TK = VK + BK = 0{,}5.\dfrac{360}{n}.0{,}20.25 + 40.n = \dfrac{900}{n} + 40n$ voor $n > 18$

Als $10 \le n \le 18$ dan hebben we 10 of 11 of ……18 bestellingen $\Rightarrow$ per bestelling moeten we dan een aantal hebben van 360/10 = 36 t/m 360/18 = 20 $\Rightarrow$ de prijs is dan dus 22,50 euro $\Rightarrow$

$TK = VK + BK = 0{,}5.\dfrac{360}{n}.0{,}20.22{,}5 + 40.n = \dfrac{810}{n} + 40n$ voor $10 \le n \le 18$

b. Als $n \le 9$ dan hebben we 9 of minder bestellingen $\Rightarrow$ nodig dan per bestelling 360/9 = 40 of meer. $\Rightarrow$ de prijs is dan 20 euro $\Rightarrow$

$TK = VK + BK = 0{,}5.\dfrac{360}{n}.0{,}20.20 + 40.n = \dfrac{720}{n} + 40n$ voor $n \le 9$

c. 1) $n > 18 \Rightarrow TK = \dfrac{900}{n} + 40n = 900.n^{-1} + 40n \Rightarrow \dfrac{d(TK)}{dn} = -900n^{-2} + 40 = 0 \Leftrightarrow$

$n^2 = \dfrac{900}{40} = 22{,}50 \Rightarrow n \approx 4{,}7$ voldoet niet , want $n > 18$

2) $10 \le n \le 18 \Rightarrow TK = \dfrac{810}{n} + 40n = 810.n^{-1} + 40n \Rightarrow \dfrac{d(TK)}{dn} = -810.n^{-2} + 40 = 0 \Leftrightarrow$

$n^2 = \dfrac{810}{40} = 20{,}25 \Rightarrow n = 4{,}5$ voldoet ook niet want n tussen 10 en 18

3) $n \le 9 \Rightarrow$

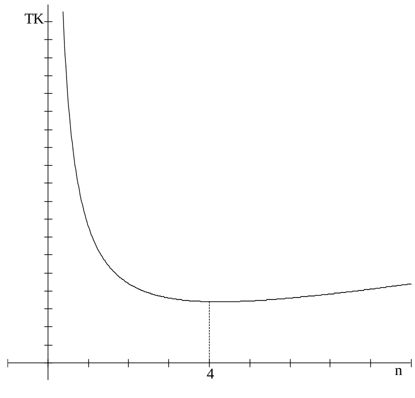
$TK = \dfrac{720}{n} + 40n = 720.n^{-1} + 40n \Rightarrow \dfrac{d(TK)}{dn} = -720n^{-2} + 40 = 0$

$\Leftrightarrow$

$n^2 = \dfrac{720}{40} = 18 \Rightarrow n = \sqrt{18} \approx 4{,}2$ Nu de schets:

Daarin zien we dat er een minimum is voor $n = 4$

De minimale kosten zijn dan 340 euro.



30.

a. Het percentage voor 1-1-2002 is: $\frac{1100-1000}{1000}.100\% = 10\%$

Het percentage voor 1-1-2003 is: $\frac{1200-1100}{1100}.100\% \approx 9,1\%$

Het percentage voor 1-1-2004 is: $\frac{1300-1200}{1200}.100\% \approx 8,3\%$

b. Het percentage voor 1-1-2002 is: $\frac{1100-1000}{1000}.100\% = 10\%$

Het percentage voor 1-1-2003 is: $\frac{1210-1100}{1100}.100\% \approx 10\%$

Het percentage voor 1-1-2004 is: $\frac{1331-1210}{1210}.100\% \approx 10\%$

c. Hij bedoelt de procentuele toename wordt minder.

d. Dit is een exponentiëel groeiproces.

31.

a. Afname per jaar met 19% $\Rightarrow$ g = 0,81 per jaar $\Rightarrow$ $g_{\text{per maand}} = (0,81)^{\frac{1}{12}} \approx 0,983$ $\Rightarrow$ afname is 1,7% per maand.

b. Toename met 65,8% $\Rightarrow$ $g_{\text{per week}} = 1{,}658$ $\Rightarrow$ $g_{\text{per dag}} = (1,658)^{\frac{1}{7}} \approx 1,075$ $\Rightarrow$ de toename per dag is 7,5%

32. Op 1-1-1980 38 miljoen inwoners ; gr. perc. 2,8 % per jaar

a. $g = 1{,}028$ $\Rightarrow$ $N = 38 \,.\, 1{,}028^t$ met N in miljoenen.

b. 1-1-2000 $\Rightarrow$ $t = 20$ $\Rightarrow$ $N = 38 \,.\, 1{,}028^{20} \approx 66{,}0$ $\Rightarrow$ ongeveer 66 miljoen inwoners.

c. Voor het eerst meer dan 110 miljoen . $\Rightarrow$ voer in $y_2 = 110$ M.b.v. intersect vinden we $t \approx 38{,}5$ $\Rightarrow$ voor het eerst in het jaar 2018.

d. Verdubbeling $\Rightarrow$ $38 \,.\, 1{,}028^t = 76$ $\Rightarrow$ Voer in $y_3 = 76$ Met intersect vinden we : $t \approx 25{,}1$ $\Rightarrow$ In 25 jaar vindt er een verdubbeling plaats.

e. 1958 $\Rightarrow$ t = -22 (op 1 januari) $\Rightarrow$ $N(-22) = 38 \,.\, 1{,}028^{-22} \approx 20{,}7$ $\Rightarrow$ Ongeveer 20,7 miljoen inwoners.

33.

a. $g_{\text{5 uur}} = \frac{174}{58} = 3$ $\Rightarrow$ $g = 3^{\frac{1}{5}} = 1,246$

b. $g_{\text{uur}} = 1{,}246$ $\Rightarrow$ de toename per uur is dan 24,6%

34. In 1970 110 miljoen In 1996 184 miljoen.

a. $g_{\text{26 jaar}} = \frac{184}{110}$ $\Rightarrow$ $g_{\text{jaar}} = \left(\frac{184}{110}\right)^{\frac{1}{26}} \approx 1,020$

b. Stel $N = b.1,020^t$ door (10,110) $\Rightarrow 110 = b.1,020^{10} \Rightarrow b = \dfrac{110}{1,020^{10}}$ ≈ 90,2 $\Rightarrow$ De formule wordt nu : N = 90 . $1,020^t$

c. Verdubbeling $1,02^t = 2$ Voer in $y_2 = 1,02^x$ en $y_3 = 2$ Met intersect vinden we $x \approx 35 \Rightarrow$ verdubbeling is er in 35 jaar.

35. Punten (2 , 15000) en (8 , 125000) en een groeiproces. $\Rightarrow g_{6aar} = \dfrac{125000}{15000} = \dfrac{25}{3} \Rightarrow$

$g_{jaar} = \left(\frac{25}{8}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,42 \Rightarrow$ Stel $N = b.1,42^t$ door (2 , 15000) $\Rightarrow 15000 = b.\ 1,42^2 \Rightarrow$

$b = \dfrac{15000}{1,42^2} \approx 7439 \Rightarrow N = 7439 . 1,42^t$

36. Beginaantal is 4000 ; bij 21° is de groei 15 % per 12 uur.
$g_{12\text{ uur}} = 1,15$ Stel de formule is $N = 4000 . 1,15^t$ met t in eenheden van 12 uur.
Na 4 dagen $\Rightarrow t = 8 \Rightarrow N(8) = 4000 . 1,15^8 \approx 12236$

Nu geldt bij 15° : $12236 . (g_{12\text{ uur }15^o})^4 = 17000 \Rightarrow g^4 = \dfrac{17000}{12236} \Rightarrow g = \left(\dfrac{17000}{12236}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 1,086$

$\Rightarrow$ het groeipercentage van 12 uur bij 15° is dan ongeveer 8,6 %

37.

a. $\dfrac{28}{20} = 1,4$ $\dfrac{39}{28} \approx 1,39$ $\dfrac{55}{39} \approx 1,41$ $\dfrac{77}{55} = 1,4$ $\dfrac{108}{77} \approx 1,40$ $\dfrac{150}{108} \approx 1,39$ $\Rightarrow$ de *q*uotiënten zijn bij benadering gelijk $\Rightarrow$ e*x*ponentiële groei.

b. Je weet $g_{2\text{ jaar}} = 1,4 \Rightarrow g = 1,4^{0,5} \approx 1,183 \Rightarrow$ De formule wordt : $N = 20 . 1,183^t$

c. Populatie in 2010 $\Rightarrow t = 20 \Rightarrow N(20) = 20 . 1,183^{20} \approx 576,4 \Rightarrow$ ongeveer 576 tuinfluiters.

38. 4000 ton in 1980 tot 180000 ton in 1990

a. $g_{10\text{ jaar}} = \dfrac{180000}{4000} = 45 \Rightarrow g_{jaar} = 45^{0,1} \approx 1,463 \Rightarrow$ formule : $N = 4000 . 1,463^t$

b. Stapsgewijs met dezelfde hoeveelheid per jaar laten afnemen $\Rightarrow$ lineair proces. $\Rightarrow$
Stel de formule is : $P = at + b$ Nu hebben we de punten (10 , 180000) en (20 , 125000) $\Rightarrow$
$a = \dfrac{\Delta P}{\Delta t} = \dfrac{125000 - 180000}{20 - 10} = -5500 \Rightarrow P = -5500t + b$ door (10 , 180000) $\Rightarrow$
$180000 = -5500 . 10 + b \Rightarrow b = 235000 \Rightarrow P = -5500.t + 235000$

c. Nu e*x*ponentiëel . Dan geldt: $g_{10\text{ jaar}} = \dfrac{125000}{180000} = \dfrac{25}{36} \Rightarrow g = \left(\dfrac{25}{36}\right)^{0,1} = 0,964 \Rightarrow$
De formule wordt nu : $P = 180000 . 0,964^{t-10}$
Let op : $t = 0$ in 1980 en $t = 10$ in 1990 met bij $t = 10$ een hoeveelheid van 180000 dus er is een verschuiving van 10 .

39

a. $5 + 1{,}3^x = 74 \Leftrightarrow 1{,}3^x = 69 \Leftrightarrow x = {}^{1,3}\log 69 = \frac{\log 69}{\log 1{,}3} \approx 16{,}1$

b. $5 \,.\, 1{,}3^x = 74 \Leftrightarrow 1{,}3^x = 14{,}8 \Leftrightarrow x = {}^{1,3}\log 14{,}8 = \frac{\log 14{,}8}{\log 1{,}3} \approx 10{,}3$

c. $2 \,.\, 1{,}034^x + 8 = 20 \Leftrightarrow 2 \,.\, 1{,}034^x = 12 \Leftrightarrow 1{,}034^x = 6 \Leftrightarrow x = {}^{1,034}\log 6 = \frac{\log 6}{\log 1{,}034} \approx 53{,}6$

d. $3.1{,}02^{x-2} = 17 \Leftrightarrow 1{,}02^{x-2} = \frac{17}{3} \Leftrightarrow x = {}^{1,02}\log\left(\frac{17}{3}\right) = \frac{\log\left(\frac{17}{3}\right)}{\log 1{,}02} \approx 87{,}6$

40. De beginhoeveelheid direct na de injectie is 2 + 5 = 7 mg De afname heeft een groeifactor van 0,92 ∆e vergelijking wordt: $7 \,.\, 0{,}92^t = 2 \Leftrightarrow 0{,}92^t = 2/7 \Leftrightarrow$

$t = {}^{0,92}\log\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{\log\left(\frac{2}{7}\right)}{\log 0{,}92} \approx 15{,}02 \approx$ 15 uur en 1 minuut

41. $y = 500 \,.\, 1{,}14^{2t-3}$ met t in jaren en $t \geq 0$

a. $y = 500.1{,}14^{2t}.1{,}14^{-3} = 500.1{,}14^{-3}.(1{,}14^2)^t \approx 337 \,.\, 1{,}30^t \Rightarrow$ de groeifactor per jaar is ongeveer 1,30 en de beginhoeveelheid op $t = 0$ is ongeveer 337

b. Nu moet gelden : $337 \,.\, 1{,}30^t = 800 \Leftrightarrow 1{,}30^t = \frac{800}{337} \Leftrightarrow t = {}^{1,30}\log\left(\frac{800}{337}\right) = \frac{\log\left(\frac{800}{337}\right)}{\log 1{,}30} \approx 3{,}30$

Je kan ook uitgaan van de oorspronkelijke formule . Dan krijg je :

$500.1{,}14^{2t-3} = 800 \Leftrightarrow 1{,}14^{2t-3} = 1{,}6 \Leftrightarrow 2t - 3 = {}^{1,14}\log 1{,}6 = \frac{\log 1{,}6}{\log 1{,}14} \Leftrightarrow$

$2t = 3{,}587\ldots + 3 \Leftrightarrow t = 1{,}79\ldots. + 1{,}5 \approx 3{,}29$

42. $A = 540 - 540 \,.\, 0{,}95^t$ met $t \geq 0$

a. $y = 0{,}95^t$ is een dalende functie (het grondtal ligt tussen 0 en 1) $\Rightarrow$ y = $-0{,}95^t$ is dus een stijgende functie Dan ook $y = -540 \,.\, 0{,}95^t$ is ook stijgend (positieve verm. t.o.v. de hor.as) en ook $y = 540 – 540 \,.\, 0{,}95^t$ is dus stijgend want deze functie schuift 540 naar boven .
Als t heel groot is dan $0{,}95^t \to 0 \Rightarrow$ de functie gaat dan naar het getal 540 $\Rightarrow A = 540$ is H.A.

b. **Als we aantonen dat iets niet waar is , dan kunnen we volstaan met het geven van een voorbeeld waaruit blijkt dat de bewering niet waar is.**
tabel:

t	0	1	2	3
A	0	27	52,65	77,02

$\frac{52{,}65}{27} \neq \frac{77{,}02}{52{,}65}$ want 1,95 is ongelijk aan 1,46 $\Rightarrow$ geen exponentiële toename.

c. 0,75 . 540 = 405 Nu moet gelden : 540 - 540 . $0{,}95^t$ = 405 ⇔ -540 . $0{,}95^t$ = -135 ⇔
$0{,}95^t = 0{,}25$ ⇔ $t = {}^{0,95}\log 0{,}25 = \dfrac{\log 0{,}25}{\log 0{,}95}$ ≈ 27,0 ⇒ na ongeveer 27 minuten.

43. Tot ongeveer bij t = 24 is er sprake van toenemende stijging. Dan zijn er ongeveer 1800 fruitvliegjes. Dit aantal is de helft van het aantal bij de horizontale asymptoot.

44. $N = \dfrac{600}{1+20.0{,}6^t}$ met t in dagen.

a. $N(4) \approx 167$

b. De zesde dag gaat van t = 5 naar t = 6 $N(6) \approx 310$ en $N(5) \approx 235$ ⇒ er zijn dus ongeveer 310 – 135 = 75 pantoffeldiertjes bijgekomen.

c. De hor. asymptoot geeft een aantal van 600 . Het omslagpunt is dus bij een hoogte van 300. Voer in $y_1 = N(x)$ en $y_2 = 300$ Met de optie intersect vinden we $t \approx$ 5,9 ⇒ Bij $t \approx 5{,}9$ is de overgang van toenemende stijging naar afnemende stijging.

d. Grenswaarde is 600 ⇒ voer in : $y_3 = 590$ Met intersect vinden we $t \approx 13{,}8$

45. $N = \dfrac{1000}{1+b.0{,}65^t}$ Met t de tijd in maanden.

a. 25 vissen in het begin ⇒ $N(0) = 25$ ⇒ $\dfrac{1000}{1+b} = 25 \Rightarrow 1+b = \dfrac{1000}{25} = 40 \Leftrightarrow b = 39$

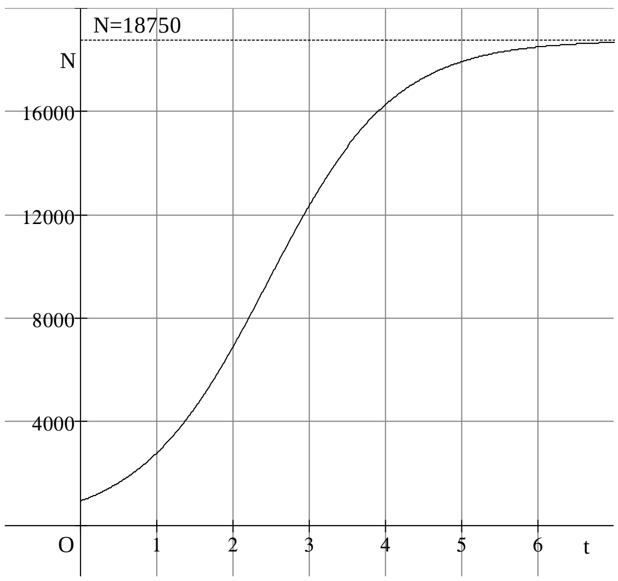
b. Waarde bij de H.A. is 1000 ⇒ omslagpunt heeft de waarde 500 ⇒ voer in : $y_1 = N(x)$ en $y_2 = 500$ Met de optie intersect vinden we $t \approx 8{,}5$ ⇒ na ongeveer 8,5 maanden gaat de toenemende stijging over in afnemende stijging.

46. $N = \dfrac{75000}{4+76.0{,}3^t}$ met N is het aantal personen en t is het aantal weken.

a.

t	0	1	2	3	4	5	6
N	938	2799	6919	12393	16249	17923	18494

Voor de asymptoot geldt dat t heel groot wordt .
Dan gaat $0{,}t^t$ naar 0 ⇒ de hele breuk gaat dan dus naar 75000/4 = 18750 ⇒ de vergelijking van de horizontale asymptoot is dus :
N = 18750



b. Bij t = 0 dan $N \approx 938$ ⇒ ongeveer 983 ziektegevallen.

c. De derde week gaat de t van 2 naar 3.
$N(3) \approx 12393$ en $N(2) = 6919$ ⇒

Er zijn dus 12393 – 6919 = 5474 ziektegevallen bijgekomen.

d. 4^e week : t van 3 naar 4. $\Rightarrow$
Het aantal ziektegevallen is toegenomen met:
$\dfrac{16249-12393}{12393}.100\% \approx 31{,}1\%$

e. GR : voer in : $y_1 = N(x)$ en $y_2 = 15000$ met de optie intersect vinden we : $x \approx 3{,}6 \Rightarrow t \approx 3{,}6$

f. Toenemende stijging naar afnemende stijging $\Rightarrow$ de hoogte van het omslagpunt is op de helft van de hoogte van de H.A. $\Rightarrow$ op hoogte van 0,5 . 18750 = 9375
Voer in $y_3 = 9377$ met intersect vinden we het snijpunt van y_1 en $y_3 \Rightarrow x \approx 2{,}4456 \Rightarrow$
dus voor $t \approx 2{,}4456$

g. We gebruiken dus de punten (0,938) en (2,4456 ; 9375)
Er geldt: $g^{2,4456} = \dfrac{9375}{938} \Rightarrow g = \left(\dfrac{9375}{938}\right)^{\frac{1}{2,4456}} \approx 2{,}56 \Rightarrow$ formule: $N_{\text{exp.}} = 938\ .\ 2{,}56^t$

h. $N(1) = 2799$ en $N_{\text{exp.}}(1) = 2401 \Rightarrow$ de procentuele afwijking is:
$\dfrac{2799-2401}{2799}.100\% \approx 14{,}2\ \%$

47a.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	10	17	27	44	70	109	164	235	317	401
N^*	65,5	38,1	23,6	14,1	8,5	5,1	3,05	1,83	1,10	0,658

t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
N	476	537	582	613	633	645	653	658	661	662
N^*	0,397	0,238	0,143	0,085	0,051	0,031	0,0184	0,0106	0,0061	0,0045

b. Beginwaarde is $N^*(0) = 65{,}6$ en er geldt:
$\dfrac{N^*(3)}{N^*(2)} = \dfrac{14{,}1}{23{,}6} \approx 0{,}6$ $\quad \dfrac{N^*(7)}{N^*(6)} = \dfrac{1{,}83}{3{,}05} \approx 0{,}6$ $\quad \dfrac{N^*(11)}{N^*(10)} = \dfrac{0{,}238}{0{,}397} \approx 0{,}6$ $\quad \dfrac{N^*(18)}{N^*(17)} = \dfrac{0{,}0061}{0{,}0106} \approx 0{,}58$
$\Rightarrow$ Dit geldt bij benadering voor al deze *q*uotiënten $\Rightarrow N^*$ is een exponentiële functie met formule : $N^* = 65{,}5\ .\ 0{,}6^t$

48a. We gaan eerst m.b.v. een tabel de waarden van $N^* = \dfrac{215-N}{N}$ berekenen $\Rightarrow$

t	0	10	20	30	40	50	60
N	4,1	5,5	7,3	9,8	13,1	17,4	23,0
N^*	51,4	38,1	28,5	20,9	15,4	11,4	8,35

t	70	80	90	100	110	120	130
N	30,0	38,8	49,4	61,9	76,1	91,7	108,0
N^*	6,17	4,54	3,35	2,47	1,83	1,35	0,99

Nu gaan we een aantal *q*uotiënten berekenen verdeeld over de tabel :

$\frac{N(10)}{N(0)}=\frac{38,1}{51,4}\approx 0,74 \quad \frac{N(40)}{N(30)}\approx 0,74 \quad \frac{\mathrm{N}(70)}{\mathrm{N}(60)}\approx 0,74 \quad \frac{N(90)}{N(80)}\approx 0,74 \quad \frac{\mathrm{N}(130)}{\mathrm{N}(120)}\approx 0,73 \;\Rightarrow$

de *q*uotiënten zijn bij benadering gelijk aan 0,74 $\Rightarrow$ het is een exponentiële funcyie met groeifactor per 10 jaar van 0,74 $\Rightarrow$ de groeifactor per jaar is : $0{,}74^{0,1}\approx 0{,}97$ en de beginhoeveelheid is 51,4 $\Rightarrow N^* = 51{,}4\ .\ 0{,}97^{t}$

b. Nu hebben twee formules voor dezelfde functie $N^* \Rightarrow$

$\frac{215-N}{N}=51,4\ .\ 0,97^{t} \;\Leftrightarrow\; \frac{215}{N}-1=51,4\ .\ 0,97^{t} \;\Leftrightarrow\; \frac{215}{\mathrm{N}}=1+51,4\ .\ 0,97^{\mathrm{t}} \;\Leftrightarrow$

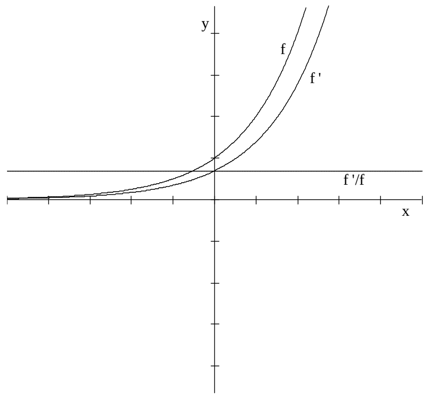
$N=\frac{215}{1+51,4\ .\ 0,97^{\mathrm{t}}}$

c. 1970 $\Rightarrow t = 180 \Rightarrow N \approx 177 \Rightarrow$ de afwijking is: $\frac{177-203}{203}.100\% \approx -12{,}8\%$

49a,b

c. $c \approx 0{,}693$

d. Voer in $y_1 = 2^x$ en y_2 = nDeriv(y_1 , x , x)
Voer ook in : $y_3 = y_1/y_2$
Neem een aantal waarden van x en bereken steeds de waarde van $y_3 \Rightarrow c \approx 1{,}609$



50.

a. $y=5.3^{x}+x^{5}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=5.3^{x}.\ln(3)+5x^{4}$

b. $y=x^{5}+5^{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=5x^{4}+5^{x}.\ln(5)$

c. $y=8x^{2}+0,5^{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=16x+0,5^{x}.\ln(0,5)$

d. `$y=100.(1-0,84^{x})=100-100.0,84^{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-100.0,84^{x}.\ln(0,84)$

e. $y=\frac{5}{x}+5.0,3^{x}=5.x^{-1}+5.0,3^{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-5x^{-2}+5.0,3^{x}.\ln(0,3)$

f. $y=2\sqrt{x}+0,8.1,32^{x}+2x-1=2x^{0,5}+0,8.1,32^{x}+2x-1\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x^{-0,5}+0,8.1,32^{x}.\ln(1,32)+2$

51.

a. $N_t=8.1,03^{t}\Rightarrow N_t\,'=8.1,03^{t}.\ln(1,03)\Rightarrow N\,'(3)=8.1,03^{3}.\ln(1,03)\approx 0,258$

b. $N_t=8+1,03^{t}\Rightarrow N_t\,'=1,03^{t}.\ln(1,03)\Rightarrow N\,'(3)=1,03^{3}.\ln(1,03)\approx 0,032$

c. $N_t=8.t^{1,03}\Rightarrow N_t\,'=8.1,03.t^{0,03}=8,24.t^{0,03}\Rightarrow N\,'(3)=8,24.3^{0,03}\approx 8,516$

d. $N_t=8.t+3.0,3^{t}\Rightarrow N_t\,'=8+3.0,3^{t}.\ln(0,3)\Rightarrow N\,'(3)=8+3.0,3^{3}.\ln(0,3)\approx 7,902$

52.

a. $y = 2^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x.2^{x-1}$ is fout want die regel geldt niet voor een exponentiële functie.

b. $y = 5.2^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d(10^x)}{dx} = 10^x.\ln(10)$ is fout want $5.2^x \neq 10^x$ want het machtsverheffen gaat voor het vermenigvuldigen. bijv. $5 . 2^3 = 5 . 8 = 40 \neq 10^3 = 1000$

53. $N_t = 30.1,8^t$ met t in dagen.

a. $\frac{dN}{dt} = 30.1,8^t.\ln(1,8) \Rightarrow N'(7) = 30.1,8^7.\ln(1,8) \approx 1080$ fr.vl./dag = 45 fr.vl./uur

b. Negende dag $\Rightarrow$ t van 8 naar 9 $\Rightarrow$ $N(9) - N(8) \approx 5951 - 3306 = 2645 \Rightarrow$ er zijn de 9e dag 2645 fr. vl. bijgekomen.

c. Begin van de 3e week $\Rightarrow t = 14 \Rightarrow N'(14) = 30.1,8^{14}.\ln(1,8) \approx 66093$ fr.vl./dag = $\frac{66093}{24.60} \approx 46$ fr.vl./minuut

54.

a. $y_1 = 2^x \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = 2^x.\ln(2) \approx 2^x.0,69 > 0$ voor elke $x \Rightarrow y_1$ is een stijgende functie.

b. $y_2 = 0,5^x \Rightarrow \frac{dy_2}{dx} = 0,5^x.\ln(2) \approx 0,5^x.(-0,69) < 0$ voor elke $x \Rightarrow y_2$ is een dalende functie.

55. $V = 5000 . 0,83^t$ met V is het aantal liters en t is het aantal uur.

a. $\frac{dV}{dt} = 5000.0,83^t.\ln(0,83) = 5000.0,83^t.(-0,186) < 0 \Rightarrow V$ is een dalende functie van t.

b. $V'(3) = 5000 . 0,83^3 . (-0,186) \approx -533 \Rightarrow$ de hoeveelheid chemische vloeistof neemt per uur af met 533 liter.

c. Constante snelheid vanaf $t = 3 \Rightarrow$ lineair proces vanaf $t = 3 \Rightarrow$ stel $V = at+b$
uit onderdeel b volgt dat r.c. = $a = -533 \Rightarrow V = -533.t + b$ Bij $t = 3$ geldt dat $V \approx 2859$
Dit punt nu invullen $\Rightarrow 2859 = -533 . 3 + b \Leftrightarrow b = 4458 \Rightarrow V = -533 . t + 4458$
10% van de oorspronkelijke hoeveelheid is 0,1 . 5000 liter = 500
Nu moeten we dus oplossen $-533 . t + 4458 = 500 \Leftrightarrow -533 . t = -3958 \Leftrightarrow$
$t \approx 7,43 \Rightarrow$ na ongeveer 7 uur en 26 minuten.

56. $N = 1200(1 - 0,73^t)$ met t in uren en N is het aantal leerlingen ; $t = 0$ om 9.00 uur.

a. $N = 550 \Rightarrow 1200(1-0,73^t) = 550 \Leftrightarrow 1200 - 1200.0,73^t = 550 \Leftrightarrow -1200.0,73^t = -650 \Leftrightarrow$
$0,73^t = \frac{-650}{-1200} \Leftrightarrow 0,73^t \approx 0,54166.. \Leftrightarrow t = {}^{0,73}\log(0,54166..) = \frac{\log(0,54166..)}{\log(0,73)} \approx 1,95$
$\Rightarrow$ na 1 uur en 57 minuten zijn er 550 leerlingen op de hoogte dus om 10.57 uur.

b. Als t heel groot wordt dan gaat $0{,}73^t$ naar 0 dus gaat N naar 1200 $\Rightarrow$ N = 1200 is H.A. D.w.z. dat uiteindelijk max*i*maal 1200 leerlingen op de hoogte zullen zijn van belangrijk nieuws.

c. $N = 1200(1-0{,}73^t) = 1200 - 1200.0{,}73^t \Rightarrow \dfrac{dN}{dt} = -1200.0{,}73^t.\ln(0{,}73) \approx$

$-1200.0{,}73^t.(-315) = 378.0{,}73^t$ > 0 voor alle t $\Rightarrow$ de functie van N is een stijgende functie.

d. Kwart voor 11 $\Rightarrow$ t = 1,75 $\Rightarrow$ N '(1,75) ≈ 378 . $0{,}73^{1,75}$ ≈ 218 lln/uur ≈ 4 lln./minuut

e. N '(0) ≈ 378 Nu moeten we dus oplossen N '(t) = 189 $\Rightarrow$

$378.0{,}73^t = 189 \Leftrightarrow 0{,}73^t = 0{,}5 \Leftrightarrow t = {}^{0,73}\log(0{,}5) = \dfrac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}73)} \approx 2{,}20$ uur ≈ 2 uur en 12 minuten.

f. 15.00 uur $\Rightarrow$ t = 6 Dan N(6) ≈ 1018 en N '(6) ≈ 57,2 $\Rightarrow$ Constante snelheid $\Rightarrow$ lineair proces. $\Rightarrow$ r.c. = a ≈ 57,2 $\Rightarrow$ Stel N = 57,2t + b door het punt (6 , 1018) $\Rightarrow$
1018 = 57,2 . 6 + b $\Leftrightarrow$ b ≈ 675 $\Rightarrow$ N = 57,2 t + 675
Nu moeten we gaan oplossen N = 1200 $\Leftrightarrow$ 57,2.t + 675 = 1200 $\Leftrightarrow$ 57,2.t = 525 $\Leftrightarrow$
$t = \dfrac{525}{57{,}2}$ ≈ 9,18 uur $\Rightarrow$ dus na 9 uur en 1 kwartier en dat is dan om kwart over 6.

57.

e. In kolom d staan de bestelde aantallen.

58.

a. $n = \sqrt{\dfrac{q.8}{2.40}} = \sqrt{\dfrac{q}{10}} = \sqrt{0{,}1q}$

b.

afzet	aantal bestellingen	bestelgrootte	aantal per jaar
500	7	71	497
600	8	75	600
700	8	88	704
800	9	89	801
900	9	100	900
1000	10	100	1000
1100	10	110	1100
1200	11	109	1199
1300	11	118	1298
1400	12	117	1404
1500	12	125	1500
1600	13	123	1599
1700	13	131	1703
1800	13	138	1794

c. Bij een afzet van 1300 stuks per jaar is de optimale bestelgrootte 118.

d. Bij een afzet van 1400 of 1500 stuks per jaar moet je 12 keer per jaar bestellen dus 1 keer per maand.

59.

a. $n = \sqrt{\dfrac{q.10}{2.25}} = \sqrt{\dfrac{q}{5}} = \sqrt{0,2q}$

b.

afzet	aantal bestellingen	bestelgrootte	aantal per jaar
500	10	50	500
550	10	55	550
600	11	55	605
650	11	59	649
700	12	58	696
750	12	63	756
800	13	62	806
850	13	65	845
900	13	69	897
950	14	68	952
1000	14	71	994
1050	14	75	1050
1100	15	73	1095
1150	15	77	1155

c. Afzet 950 stuks per jaar dan 14 bestellingen metee bestelgrootte van 68 .

d. Bestelgrootte minder dan 68 bij een afzet van 850 of minder.

60.

a. $n = \sqrt{\dfrac{q.6}{2.b}} = \sqrt{\dfrac{3q}{b}}$

ben c.

optimale aantal bestellingen

afzet	bestelkosten in euro's per bestelling											
	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
500	12	10	9	8	7	7	6	6	5	5	5	5
600	13	11	9	8	8	7	7	6	6	6	5	5
700	14	12	10	9	8	8	7	7	6	6	6	6
800	15	13	11	10	9	8	8	7	7	7	6	6
900	16	13	12	10	9	9	8	8	7	7	7	6
1000	17	14	12	11	10	9	9	8	8	7	7	7
1100	18	15	13	11	10	10	9	9	8	8	7	7
1200	19	15	13	12	11	10	9	9	8	8	8	7
1300	20	16	14	12	11	11	10	9	9	8	8	8
1400	20	17	14	13	12	11	10	10	9	9	8	8
1500	21	17	15	13	12	11	11	10	9	9	9	8
1600	22	18	15	14	13	12	11	10	10	9	9	9
1700	23	18	16	14	13	12	11	11	10	10	9	9
1800	23	19	16	15	13	12	12	11	10	10	9	9
1900	24	19	17	15	14	13	12	11	11	10	10	9
2000	24	20	17	15	14	13	12	12	11	10	10	10

d. Bij een afzet van 1200 en 20 euro bestelkosten is de optimale bestelgrootte 13 per jaar
e. Bij een afzet van 1700 en 35 euro bestelkosten is de optimale bestelgrootte 12 per jaar.
f. Meer dan 1 keer per maand bestellen bij 1900 stuks ⇒ meer dan 12 bestellingen per jaar . Dat is het geval bij bestelkosten die minder dan 40 euro zijn.
g. De bestelgroote is *q/n*
Dus bij 500 stuks hebben we een bestelgroote van 100 of meer.
We moeten dus kijken naar de eerste en de laatste kolom. ⇒ 1000/7 ≈ 143 en 1100/7 ≈ 157 > 150
Dus vanaf een afzet van 1100 komt het voor.

61.

$n = \sqrt{\frac{q.10}{2.b}} = \sqrt{\frac{5q}{b}}$ Nu moeten we dit verwerken in Excel.

optimale aantal bestellingen

afzet	bestelkosten in euro's per bestelling											
	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
500	16	13	11	10	9	8	8	7	7	7	6	6
600	17	14	12	11	10	9	9	8	8	7	7	7
700	19	15	13	12	11	10	9	9	8	8	8	7
800	20	16	14	13	12	11	10	9	9	9	8	8
900	21	17	15	13	12	11	11	10	9	9	9	8
1000	22	18	16	14	13	12	11	11	10	10	9	9
1100	23	19	17	15	14	13	12	11	10	10	10	9
1200	24	20	17	15	14	13	12	12	11	10	10	10
1300	25	21	18	16	15	14	13	12	11	11	10	10
1400	26	22	19	17	15	14	13	12	12	11	11	10
1500	27	22	19	17	16	15	14	13	12	12	11	11
1600	28	23	20	18	16	15	14	13	13	12	12	11
1700	29	24	21	18	17	16	15	14	13	12	12	11
1800	30	24	21	19	17	16	15	14	13	13	12	12
1900	31	25	22	19	18	16	15	15	14	13	13	12
2000	32	26	22	20	18	17	16	15	14	13	13	12

a. Dan hebben we 16 bestellingen per jaar.
b. Dan hebben we 13 bestellingen per jaar.

c. Meer dan twee keer per maand bestellen bij 1400 stukt ⇒ bij 24 of meer bestellingen per jaar dus alleen bij bestelkosten van 10 euro per bestelling.